

ZREDUKOWANE HOMOLOGIE KHOVANOVA

WOJCIECH LUBAWSKI

STRESZCZENIE. Waciwie od momentu zdefiniowania przez Khovanova [2] nowego niezmiennika bdczego kategoryfikacj wielomianu Jonesa, nazwanego póniej homologiami Khovanova, zauwaono potrzeb (i to zarówno teoretycznż jak i obliczeniowż) posugiwania si *zredukowanymi homologiami*. Niestety, okazało si e jedyne dostpne definicje w przypadku zwykłych homologii sż nienaturalne – zależ od dokonywania wyborów skadowych odpowiednich diagramów i nie dają si uogólni na struktury kategoryjne wyższych poziomów (jak na przykład na morfizmy między wzami); zawód ten spotgowa fakt skonstruowania takich zredukowanych homologii dla nieparzystych homologii Khovanova podanych przez Rasmussena, Ozsvatha i Szabo w [4]. W poniższej pracy konstruujemy *waciwe* zredukowane homologie Khovanova, które mona naturalnie zdefiniowa dla dowolnego diagramu wza lub splotu.

1. WPROWADZENIE

W [5] zdefiniowano nowż wersj homologii Khovanova. Przypomnijmy skonstruowane tam struktury algebraiczne.

Rozwamy specjalny rodzaj algebry tensorowej generowanej przez modu z gradacj $A = R\mathbf{1} \oplus R\mathbf{x}$ nad $R = \mathbb{Z}[X, Y, Z]/X^2 = Y^2 = 1$ z operacjami danymi poprzez:

- mnoenie $m: A^{\otimes 2} \rightarrow A^{\otimes 1}$

$$\begin{aligned} m(\mathbf{11}) &= 1 & m(\mathbf{1x}) &= \mathbf{x} \\ m(\mathbf{x1}) &= XZ\mathbf{x} & m(\mathbf{xx}) &= 0 \end{aligned}$$

- komnoenie $\Delta: A^{\otimes 1} \rightarrow A^{\otimes 2}$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{1}) &= \mathbf{x1} + YZ\mathbf{1x} \\ \Delta(\mathbf{x}) &= (\mathbf{xx}) \end{aligned}$$

- jedno $\eta: R \rightarrow A$

$$\eta(1) = \mathbf{1}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 55R37.

Key words and phrases. teoria wzów, homologie Khovanova.

- kojedno $\epsilon: A \rightarrow R$

$$\epsilon(\mathbf{1}) = 0 \qquad \epsilon(\mathbf{x}) = 1$$

- permutacja $P: A^{\otimes 2} \rightarrow A^{\otimes 2}$

$$\begin{aligned} P(\mathbf{11}) &= X\mathbf{11} & P(\mathbf{1x}) &= Z^{-1}\mathbf{x1} \\ P(\mathbf{xx}) &= Y\mathbf{xx} & P(\mathbf{x1}) &= Z\mathbf{1x} \end{aligned}$$

Oznaczmy przez D dowolny diagram rozpatrywanego splotu. Diagram taki wyposażamy w każdy skrzyżowaniu w strzaki (moemy wybrać jeden z dwóch nierównowaganych sposobów narysowania takich strzaek, niemniej oba sposoby dadzą izomorficzne obiekty) zgodnie z następującymi zasadami:



Obrazek powyżej pokazuje również sposoby tzw. wygadzenia skrzyżowania. Jeśli mamy na diagramie D dokładnie n skrzyżowań, to indeksując dowolnie skrzyżowania otrzymamy n strzaek przypisanych do n skrzyżowań w diagramie D . Podobnie dla dowolnego $I \subseteq \{0, 1\}^n$ otrzymamy n strzaek na n skrzyżowaniach, przy czym k -te skrzyżowanie wygadamy w sposób wskazany przez k -tą współrzędną I . Wygadzenie takie oznaczmy $D(I)$, składa się ono z dokładnie $k(I)$ rozłącznych okręgów (które będziemy dalej oznaczać $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{k(I)}$). Dla ułatwienia opisu przyjmijmy, że $s(a_i)$ oznacza okrąg z którego a_i wychodzi, $t(a_i)$ okrąg do którego a_i idzie.

Niech teraz K_k oznacza dla każdego k graf peny o k wierzchołkach, wyposażony w dodatkowe informacje. Jeśli $k = k(I)$ to używamy także oznaczenia K_I .

Zauważmy na przykład, że $D(0)$ możemy utożsamiać z podgrafem $K_{k(0)}$ wyposażonym dodatkowo w cykliczny porządek pomiędzy krawędziami przy każdym z wierzchołków. Podgraf ten będziemy oznaczać $\mathcal{M}(D(0))$.

Niech $\mathcal{A}'(I)$ będzie zbiorem składającym się z wierzchołków i krawędzi $K(I)$. Rozpinając na tym zbiorze abelową grupę wolną, a następnie na grupie jej pierścień grupowy otrzymamy pierścień $\mathcal{A}(I)$, który będziemy dalej nazywać wolną algebrą strzaek $D(I)$. Niech A będzie pierścieniem Frobeniusa po raz pierwszy zdefiniowanym przez Khovanova w [1], tj. $A = \mathbb{Z}\mathbf{1} \oplus \mathbb{Z}\mathbf{x}$ gdzie A jest wyposażone w dodatkową gradację, przy której $\deg \mathbf{1} = -1$ oraz $\deg \mathbf{x} = +1$. Definiujemy reprezentację \mathcal{A} do odpowiedniej potęgi tensorowej A w sposób następujący:

$$ev_I: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}Mor(K^{\otimes k(I)}, K^{\otimes k(I)})$$

Jeli $a_i \in \mathcal{A}$ jest strzakż dla której $s(a_i) = \bar{s}_s$ oraz $t(a_i) = \bar{s}_t$ (dla $s \neq t$) to przyjmujemy $ev_I(a_i) = T^{s,t}$; jeli a_i taka, e $s(a_i) = t(a_i) = \bar{s}_s$ to $ev_I(a_i) = T^s$ gdzie $T^{s,t}: K^{\otimes 2} \rightarrow K^{\otimes 2}$ jest dane poprzez

$$\begin{aligned} T^{s,t}(\mathbf{1}\mathbf{1}) &= \mathbf{x}\mathbf{1} + \mathbf{1}\mathbf{x} & T^{s,t}(\mathbf{1}\mathbf{x}) &= \mathbf{x}\mathbf{x} \\ T^{s,t}(\mathbf{x}\mathbf{1}) &= \mathbf{x}\mathbf{x} & T^{s,t}(\mathbf{x}\mathbf{x}) &= \mathbf{0}\mathbf{1}\mathbf{x} \end{aligned}$$

ponadto $T^s: K \rightarrow K$ jest dane jako

$$T^s(\mathbf{1}) = 2\mathbf{x} \quad T^s(\mathbf{x}) = 0$$

Rozszerzamy ev_I do całego \mathcal{A} przyjmując $ev_I(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = ev_I(a_{i_1}) \circ \dots \circ ev_I(a_{i_m})$. Oznaczmy poprzez \mathcal{O}_I obraz odwzorowania ev_I .

Zauwamy, e mamy nastpujące operacje. Jeli $D(I)$ oraz $D(J)$ sż dwoma wygadzeniami diagramu D różniczymi si tylko sposobem wygadzenia skrzyżowania o indeksie i , to definiujemy $\partial_J^I: \mathcal{A}(I) \rightarrow \mathcal{B}(I)$ jako:

$$\partial_J^I(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = \begin{cases} a_{i_1} \dots a_{i_m} & , s(a_i) \neq t(a_i) \text{ w } I \\ a_i a_{i_1} \dots a_{i_m} & , s(a_i) = t(a_i) \text{ w } I \end{cases}$$

Zauwamy, e zachodzi nastpujące

Theorem 1. *Nastpujący diagram jest przemienny*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}(I) & \xrightarrow{ev_I} & \mathbf{0} & \xrightarrow{e_1} & \mathcal{A}^{\otimes k(I)} \\ \downarrow \partial_J^I & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}(J) & \xrightarrow{ev_J} & \mathbf{0} & \xrightarrow{e_1} & \mathcal{A}^{\otimes k(J)} \end{array}$$

gdzie e_1 jest wziciem wartoci danego odwzorowania na odpowiednio duęj potdze tensorowej jedyńki, a różniczka z prawej strony jest różniczkż Khovanova.

Przyjmując jako $|I|$ sum wszystkich współczynników w I oraz

$$\partial^I = \sum_{I < J} \epsilon_J^I \partial_J^I,$$

gdzie ϵ_J^I jest oznakowaniem Khovanova otrzymamy kompleks

$$\mathcal{O}_k: = \oplus_{|I|=k} \mathcal{O}_I.$$

2. DOWÓD NIEZMIENNICZOŚCI – KOMPLEKS STRZAKOWY

W celu wykazania, że kompleks \mathcal{O} jest niezmienny względem ruchów Reidemastera przedstawimy alternatywny opis tego kompleksu w języku grafów. Podobny zabieg zastosował Bloom w pracy [12] dowodząc niezmienniczości homologii nieparzystych względem mutacji. Niech zatem $\mathcal{R}'(D(I))$ będzie zbiorem pografów K_I zdefiniowanym w sposób następujący. $X \in \mathcal{R}'(D(I)) \Leftrightarrow$ gdy dla dowolnej skądowej spójnej S zachodzi jeden z poniższych warunków:

- 1) S jest wyrónionym wierzchołkiem;
- 2) $\pi(S) = 0$ i S ma co najwyżej jeden wyróniony wierzchołek;
- 3) $\pi(S) = \mathbb{Z}$ i S nie posiada wyrónionych wierzchołków.

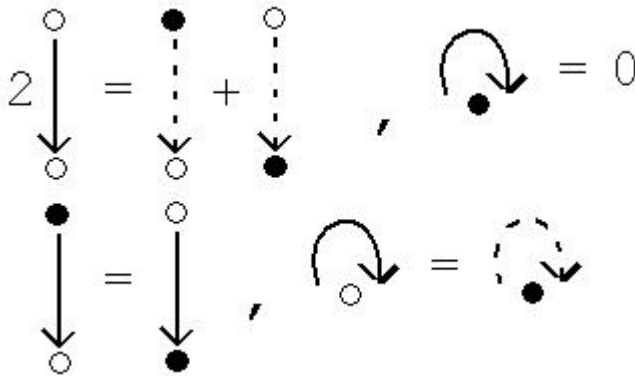
Definiujemy $\mathcal{R}(D(I)) := \mathbb{Z}\mathcal{R}'(D(I))$. Zauważamy, że mamy odwzorowanie

$$\psi: \mathcal{R}(D(I)) \rightarrow \mathcal{A}(I)$$

przyporządkowujące strzace a_i odwzorowanie $T^{s(a_i), t(a_i)}$ lub $T^{s(a_i)=t(a_i)}$, wierzchołkowi \bar{s}_m odwzorowanie T^m , a podgrafowi składającemu się z paru krawędzi i wierzchołków odpowiednie zoenie (zauważamy, że kolejno zoenia nie jest istotna).

W wielu miejscach poniżej będziemy rysować fragmenty diagramów w których – biały wierzchołek oznacza niewyróniony wierzchołek diagramu, czarny wierzchołek oznacza wyróniony wierzchołek, przerywana strzaka oznacza strzak $D(I)$ nie leżący w rozpatrywanym jego podzbiorze, a cięga strzaka oznacza strzak w $D(I)$ która leży w rozpatrywanym jego podzbiorze.

Lemma 2. *Źródło odwzorowania ψ jest generowane przez następujące relacje (przedstawione lokalnie):*

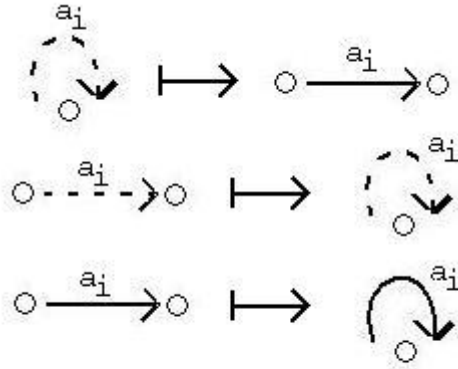


dodatkowo jeśli l_1, \dots, l_{2m} jest parzystym cyklem w grafie, to $l_1 + l_3 + \dots + l_{2m-1} = l_2 + \dots + l_{2m}$, a jeśli l_1, \dots, l_{2m} jest dowolnym cyklem w grafie, to

$l_1 + l_2 + \dots + l_m = l_1 + \dots + l_{2m-1} +$ dowolny wyróżniony wierzchołek na cyklu (take rozumiane jako relacje lokalne).

Definition 3. Zbiór $\Theta_I := \mathcal{R}(D(I)) / \ker \psi$ nazwiemy grupą grafów dla diagramu $D(I)$.

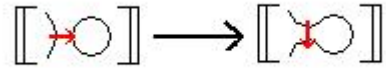
Zauważmy, że mamy, podobnie jak wcześniej, różniczkowanie. Jeśli wygadenia diagramu $D(I)$ oraz $D(J)$ różnią się tylko wygadeniem w skrzyżowaniu i -tym (lub inaczej, wzdłuż strzałki $a_i \in \mathcal{M}(D(0))$) to w zależności od sytuacji wyjściowej możemy mieć dwie sytuacje:



podobnie jeśli któryś z przylegających wierzchołków jest wyróżniony to wyróżniamy także samą liczbę wierzchołków po drugiej stronie (zauważmy, że zgodnie z opisem jądra ψ różniczka jest poprawnie określona).

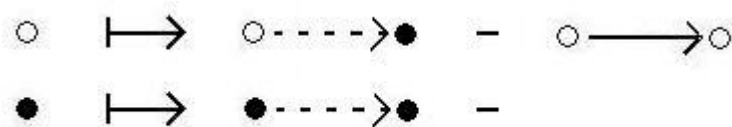
Przejdmy następnie do wykazania, że kompleks (a dokładniej jego homologie) są rzeczywiście niezmiennikiem wza. Dowód przeprowadzimy w duchu Bar-Natana [1], korzystając silnie z jego intuicji geometrycznej.

2.1. Niezmienniczo względem 1RM. W przypadku pierwszego ruchu Reidemaistera mamy następujące odwzorowanie kompleksów:



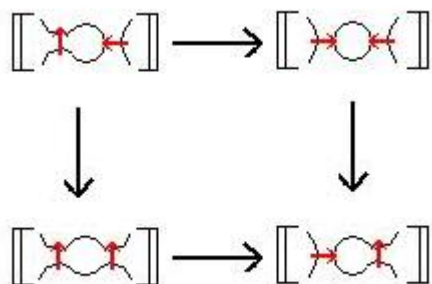
Warto zauważyć, że nasz wyjściowy kompleks jest stakiem nad tym odwzorowaniem.

odwzorowanie zdefiniowane w sposób następujący:



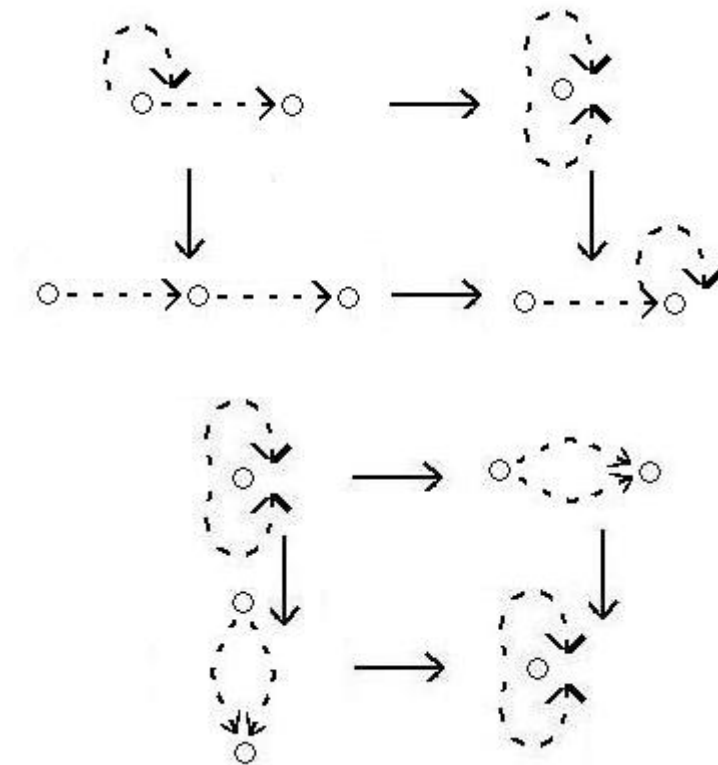
indukuje izomorfizm homologii szukanego wza i wza „bez ptelki”, tj. po wykonaniu pierwszego ruchu Reidemaistera.

2.2. Niezmienniczo względem 2RM. Mamy następujący diagram:

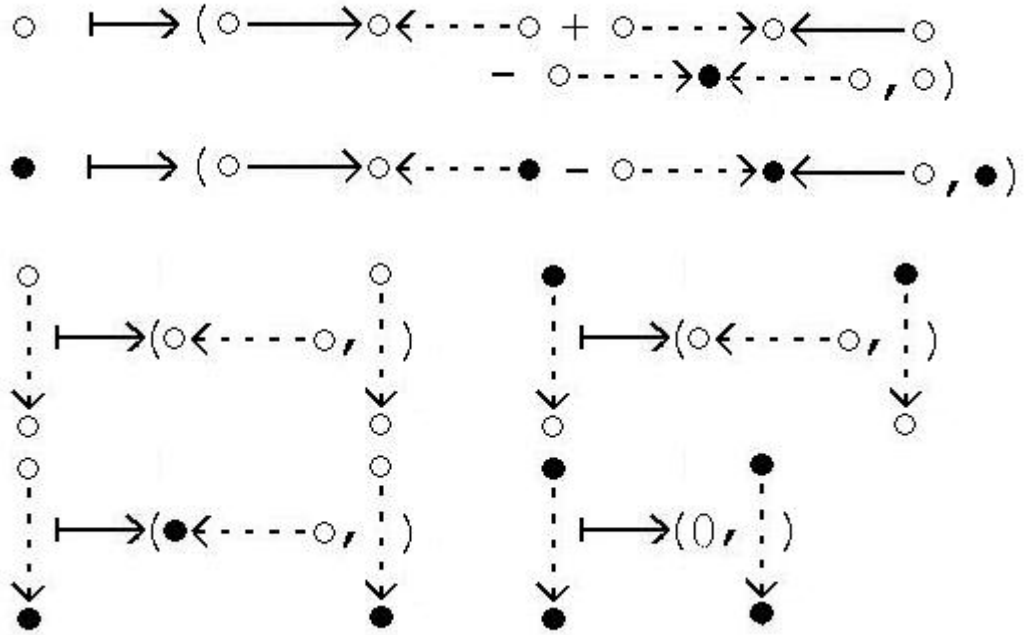


niestety, w naszym przypadku mamy dwie możliwości uzupełnienia tego diagramu do pełnych okręgów. Niezmienniczo musimy pokazać dla każdego z nich zwracając uwagę na przemienność tych dwóch przypadków z odpowiednimi różniczkami.

Obydwa przypadki przedstawiamy na następujących dwóch diagramach:

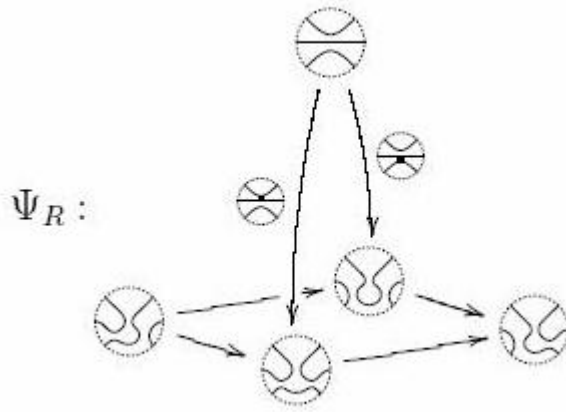
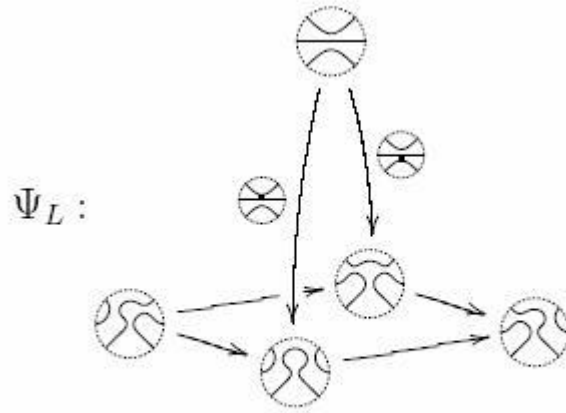


a odpowiednie odwzorowania, prowadzące do przekształceń diagramów (kompleks lewy dolny jest w parze pierwszy) przedstawiamy jako:



Z tego, że pomiędzy dowolnymi dwoma okręgami jest co najmniej jedna strzałka oraz z postaci jądra ψ wynika, że odwzorowania te składają się w jedno odwzorowanie kompleksów, indukujące izomorfizmy w homologiach, co dowodzi niezmienniczoci.

2.3. Niezmienniczo względem 3RM. Zauważamy wprawdzie, że odwzorowanie zdefiniowane dla 2RM jest w rzeczywistości retrakcją deformacyjną, więc stosując twierdzenie o stokach otrzymamy, że kompleksy dla dwóch stron trzeciego ruchu Reidemaistera są homotopijne do stoków:



a te, jak atwo wida, sż jednakowe.

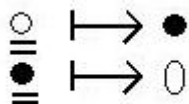
3. WERSJA CHRONOLOGICZNA

Niech $R' = \mathbb{Z}[X, Y]/X^2 = Y^2 = 1$. Zgodnie z powyszym podrozdzia-
em wystarczy rozpatrywa kompleksy nad R' zamiast nad R . atwo zauway
(czego ju nie bdziemy robi), e wszystkie powysze definicje i rozumowania
da si przeprowadzi r3wnie w przypadku chronologicznym. Istotna moe
by r3wnie informacja, e taki zredukowany chronologiczny kompleks Kho-
vanova w przypadku nieparzystych homologii Khovanova redukuje si do
zredukowanych homologii Khovanova (zdefiniowanych oryginalnie w [4]).

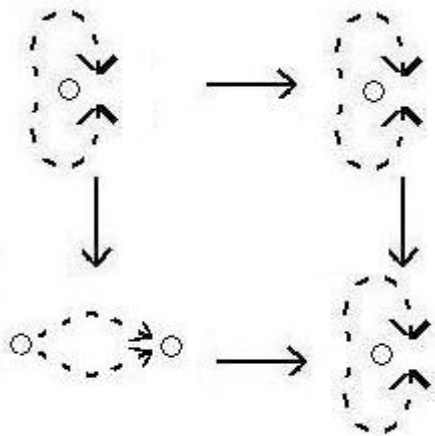
4. WZY WIRTUALNE

Wzy wirtualne to wzy wyposażone w jeszcze jeden rodzaj skrzyżowania, tzw. skrzyżowanie wirtualne. Dwa diagramy wza wirtualnego są równoważne, jeśli od jednego do drugiego możemy dojść poprzez ruch Reidemaistera oraz tzw. detour move: fragment wza pomiędzy dwoma punktami, który posiada wyłącznie skrzyżowania wirtualne możemy wymazać i narysować w dowolny sposób ponownie - pamiętajcie by wszystkie nowe skrzyżowania oznaczyć jako wirtualne.

Homologie dla wzów wirtualnych definiujemy poprzez wzięcie dwóch kopii kompleksu zredukowanego (drugą kopię będziemy oznaczać poprzez dodanie kreski pod jednym z wierzchołków) oraz dodefiniowanie nowego odwzorowania, tzw. twistu idącego od jednego okręgu do jednego okręgu jako dodanie kreski do danego elementu zgodnie z relacjami (kreskę możemy zawsze dowolnie ustawić na diagramie):



Aby wykazać niezmienniczo homologii dla wzów wirtualnych łatwo zauważyć, że wystarczy sprawdzić 2RM. Istotnie, do pierwszego ruchu wirtualno wza nic nie wnosi, a trzeci wynika w taki sam sposób z drugiego jak w przypadku klasycznym. Drugi ruch w jedynym nieklasycznym przypadku wygląda w sposób następujący:



Licząc homologie dochodzimy, podobnie jak i w pozostałych przypadkach, posługując się interpretacją geometryczną następujące odwzorowanie:

$\circ \mapsto (\circ, \circ)$
 $\bullet \mapsto (\bullet, \bullet)$
 $\circ \mapsto (\bullet, \circ)$
 $\bullet \mapsto (\circ, \bullet)$

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE DEPARTMENT, JAGIELLONIAN UNIVERSITY,
GOBIA 24. 00-300 KRAKÓW. POLAND

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES, NIADECKICH 8,
00-956 WARSZAWA, POLAND
E-mail address: `w.lubawski@gmail.com`